Ueber die Beweise

für das

Parallelogramm der Kräfte.

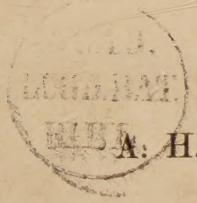
Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

in

Göttingen.



Von

A. H. C. Westphal.

Göttingen,
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner.)

186

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0101

Einleitung.

Wie viele andere Wahrheiten auf den verschiedensten Gebieten des Wissens hat auch der Satz vom Parallelogramm der Kräfte das Schicksal gehabt, dass seine Kenntniss und Anwendung dem wirklichen Verständniss lange vorausging. Obgleich schon dem hohen Alterthum bekannt, blieb er doch bis in die neueren Zeiten ohne eine annähernd genügende Begründung, und es darf behauptet werden, dass auch die besten gegenwärtig für ihn vorhandenen Beweise noch nicht denjenigen Grad von Vollkommenheit erreicht haben, dessen sie fähig zu sein scheinen.

Die grosse Bedeutung dieses Fundamentalsatzes der Statik hat nun zu den verschiedensten Zeiten grosse Mathematiker veranlasst, ihren Scharfsinn auf die Erfindung eines möglichst vollkommenen Beweises zu richten. Konnten diese Bestrebungen auch keine glänzenden Erweiterungen des Gebiets der Mechanik zur Folge haben, so haben sich doch jene Männer durch Befestigung des Grundes grosse Verdienste um die Wissenschaft erworben.

Viele Jahrhunderte kannte man nur ein Parallelogramm der Bewegungen. Den ersten Beweis dieses Satzes giebt Aristoteles in seinen mechanischen Problemen und Archimedes und Nicomedes wandten ihn zur Construction verschiedener Curven an [1]). Dann gerieth er in lange Vergessenheit, aus der ihn erst Galilei hervorzog, indem er ihn zur Bestimmung der Wurflinie benutzte. Ausser diesem schrieben über die Zusammensetzung der Bewegungen Descartes, Roberval und andere Mathematiker jener Zeit, bis Newton und Varignon in ihren 1686—87 erschienenen Werken die Zusammensetzung der Kräfte lehrten und diese aus der der Bewegungen

1) Lagrange, mécanique analytique in der Einleitung.

ableiteten. Indess auch ihre Beweise lösten nicht die logischen Schwierigkeiten, welche eine Zusammensetzung von gleichzeitigen Bewegungen mit sich bringt. Um daher diese Klippe zu vermeiden, schlug Daniel Bernoulli einen andern Weg ein und veröffentlichte 1728 einen Beweis, welcher auf mathematischen Principien beruht. Damit war der Forschung eine neue Bahn gebrochen. Viele der bedeutendsten Mathematiker, wie D'Alembert, Laplace, Poisson (in der neuesten Zeit hat Schlömilch sich viel mit diesem Gegenstande beschäftigt und eine ganze Reihe neuer Beweise gegeben) sind ihm seitdem auf diesem Wege gefolgt, während andere Forscher eine meist einfachere Lösung des Problems mit Hülfe verschiedener Sätze der Statik und Mechanik, besonders der Theorie des Hebels, suchten. Derartige Bestrebungen, welche bis in die letzten Jahre hineinreichen, wollten entweder eine schärfere Beweisführung liefern, oder sie bezwecken eine möglichst einfache Begründung, welche für einen so elementaren Lehrsatz allerdings sehr wünschenswerth ist.

Diese Arbeiten sind nun in den verschiedensten Werken und periodischen Schriften aller Länder zerstreut, und es erscheint daher eine geordnete Uebersicht über die besseren derselben von Nutzen und Interesse. Einige sehr kurze Andeutungen von D. Bernoulli [1]), Lagrange [2]), D'Alembert [3]), Lambert [4]), Schlömilch [5]) u. A. abgerechnet, findet sich eine solche nur in den beiden academischen Abhandlungen von J. H. Westphal [6]) und C. Jacobi [7]) aus dem Jahre 1817; diese geben indess jetzt nicht mehr ein richtiges Bild von den Bestrebungen auf diesem Gebiete.

Deshalb haben wir uns die Aufgabe gestellt, eine solche Uebersicht neuerdings zu liefern, mit der Absicht, darzuthun, dass der Satz vom Parallelogramm der Kräfte nicht streng mathematisch bewiesen werden kann. Wir werden zu diesem Zwecke zeigen, dass

---

1) Examen principiorum mechanicae. S. Comment. Acad. Petrop. I, 1728. p. 126.

2) Mécanique analyt.

3) Opuscules mathém. I. Paris 1761 p. 169 u. VI. Paris 1773 p. 360.

4) Beiträge zum Gebrauch der Mathematik. II. Berlin 1770 p. 363.

5) Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Physik II, 1857 p. 85.

6) Demonstrationum Compos. Virium Expositio. Gottingae 1817.

7) Praecipuorum Conatuum Comp. Vir. Demonstr. Recensio. Gottingae 1817.

selbst die besten sogenannten Beweise, nämlich die mathematischen, von Voraussetzungen ausgehen, welche, ohne dass sie selbstverständlich wären, sich nicht weiter begründen lassen. Wir werden aus dem überreichen Material nur diejenigen Beweise auswählen, welche entweder einen wesentlichen Fortschritt bekunden oder wenigstens neue Gesichtspunkte aufstellen. Dabei konnten ganze Gruppen von Beweisen, welche auf unrichtigen Principien beruhen oder eine andere als die sonst allgemein verbreitete Auffassung des Satzes vom Parallelogramm vertreten, durch eine gemeinsame Besprechung ihre Erledigung finden.

Für die naturgemässe Eintheilung der Beweise finden wir einen Leitfaden in dem oben gegebenen kurzen Abriss der Geschichte des Theorems. Sie zerfallen danach in vier Abtheilungen, welche der Reihe nach diejenigen Beweise enthalten, die

1. die Zusammensetzung zweier Bewegungen lehren;
2. die Zusammensetzung zweier Kräfte aus den durch sie hervorgebrachten Bewegungen ableiten;
3. die Zusammensetzung zweier Kräfte aus mathematischen Principien und
4. aus andern Sätzen der Mechanik ableiten.

Erste Abtheilung.

Zusammensetzung zweier Bewegungen.

Das zu erweisende Theorem lautet:

Wenn einem Punkte[1]) gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen hin zwei Bewegungen mitgetheilt werden, so durchläuft er mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Diagonale eines Parallelogramms, welches dadurch bestimmt ist, dass man auf den Richtungen der Bewegungen von ihrem Anfangspunkte aus ihnen proportionale Strecken abschneidet.

Natürlich verbietet sich die einfachste Auffassung des Vordersatzes, welche dahin gehen würde, dass der Punkt in Wirklichkeit gleichzeitig zwei verschiedene Wege zurücklege, von selbst. Wollte man daher das Problem lösen, so musste man eine Erklärung für

1) Der Einfachheit wegen statt Körper.

das Entstehen der einfachen resultirenden Bewegung suchen. Dies ist auf verschiedene Weise geschehen.

1) Man giebt dem Punkt die beiden Bewegungen nach einander. Doch da dies zu augenfällig gegen das Theorem streitet, so lässt man die beiden Bewegungen in unendlich kleinen Zeittheilchen mit einander abwechseln und den Punkt so eine Zickzacklinie durchlaufen, welche aber, wenn man die Zeittheilchen nur klein genug genommen hat, zu einer geraden werden soll.

2) Man giebt, nach dem Vorgang von Aristoteles[1]), nur die eine Bewegung dem Punkte selbst, die andere aber dem Raume, in welchem sich derselbe bewegt. Während sich der Punkt auf der Geraden AB von A nach B bewegt, schreitet diese in der Richtung AC nach der Lage CD fort. Da nun der Punkt in demselben Augenblicke in B ankommt, in welchem AB die Lage CD erreicht, so ist er vermöge der beiden Bewegungen AB und AC in der gegebenen Zeit nach D gekommen. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass der Punkt dabei die Diagonale des durch AB und AC bestimmten Parallelogramms durchlaufen hat. Eine ähnliche Erklärung geben Roberval[2]), Büsch[3]) u. A.

3) Kant[4]) sagt darüber Folgendes: »Die Zusammensetzung zweier Bewegungen eines und desselben Körpers kann nur dadurch gedacht werden, dass die eine im absoluten Raum, statt der andern aber eine mit der gleichen Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung geschehende Bewegung des relativen Raums als mit derselben einerlei vorgestellt wird«.

Alle drei Auffassungen weichen von den Annahmen des Theorems ab. Die erste wahrt nicht die Gleichzeitigkeit, die zweite führt eine Kraft ein, welche Punkt und Linie in fester Verbindung erhält und giebt, wie die dritte, nicht beide Bewegungen dem Punkte selbst.

Es ist also die Zusammensetzung zweier Bewegungen durch keinen der obigen Versuche in dem Sinne, wie es das Theorem verlangt, genügend erklärt. Wir wenden uns deshalb zum folgenden Abschnitt.

---

1) *Ἀριστοτέλους μηχανικὰ προβλήματα.* Ed. P. v. Cappelle. Amst. 1812. p. 77. Siehe auch Poselger, Abhandl. d. Berl. Akad. 1829 p. 76.

2) Composition des Mouvements. Siehe Memoires de l'Acad. des Sciences von 166 bis 1699.

3) Versuch einer Mathematik I, 2. Abth. Hamburg.

4) Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften. 1726.

Zweite Abtheilung.

Zusammensetzung zweier Kräfte, abgeleitet aus der Zusammensetzung zweier Bewegungen.

Newton und Varignon waren die ersten, welche die Nothwendigkeit erkannten, die Ursachen der Bewegungen in den Beweis einzuführen. Newtons[1]) Beweis des Satzes vom Parallelogramm ist der folgende: »Wenn eine Kraft *P* in einer gewissen Zeit einen Körper von *A* nach *B*, eine andere *Q* aber in gleicher Zeit von *A* nach *C* treiben kann, so werden sie, wenn sie gleichzeitig wirken, ihn in derselben Zeit durch die Diogonale des Parallelogramms *ABDC* bewegen. Denn da die Kraft *Q* nur in der Richtung *AC* wirkt, so wird sie die Kraft *P*, welche den Körper gegen *BD* treibt, nicht hindern; derselbe wird also nach der gegebenen Zeit in *BD* sein. Aus denselben Gründen muss er sich aber auch in *CD* befinden und folglich kann er nur nach *D* gekommen sein, welches in beiden Linien liegt. Aus dem Gesetz der Beharrung aber folgt, dass er sich geradlinig von *A* nach *D* bewegt haben muss.

Die Diagonale *AD* bezeichnet also die Resultante der beiden durch *AB* und *AC* bezeichneten Componenten.

Lambert nimmt an, dass es Newton bei der Abfassung des obigen Beweises mehr um Kürze als um Strenge zu thun war. Denn die Annahmen, dass die Wirkungen der Kräfte in allen parallelen Richtungen dieselben seien, und dass die eine der beiden Kräfte die andere in ihrer Wirkung nicht störe, nehmen dem Satz seine Allgemeinheit und Nothwendigkeit. Die zweite Annahme bringt überdiess die oben erwähnten Schwierigkeiten wieder in den Beweis hinein. Denn wenn jede Kraft unabhängig von der andern dem Körper eine eigene Bewegung mittheilt, so ergiebt sich wieder die oben als unlösbar erkannte Aufgabe, zwei Bewegungen zusammen zu setzen. Trotzdem erlangte dieser Beweis die grösste Verbreitung. Derselbe findet sich z. B. in Wolfii elementa math. Halae etc. 1748. II, p. 58. Emmerson,

1) Principia math. philosoph. natur. London 1779, p. 15.

principles of mechanics p. 11. London 1773. Delacaille, lectiones mechanicae. Paris 1769. Tome I, p. 591.

Varignon[1]) lässt die eine der beiden Kräfte den Punkt selbst, die andere aber die Linie forttreiben, in welcher sich der Punkt bewegt. Das Wesentliche dieser Auffassungsweise ist schon in der ersten Abtheilung besprochen.

Wir sehen also, dass weder eine Zusammensetzung zweier Bewegungen an sich, noch auch eine Zusammensetzung von Kräften in der Art denkbar ist, dass jede in ihrer Wirksamkeit für sich betrachtet werde. Wir sind deshalb darauf angewiesen, die Kräfte in ihrer Gesammtwirkung ins Auge zu fassen. Dies geschieht in den folgenden Beweisen.

Dritte Abtheilung.

Zusammensetzung zweier Kräfte, abgeleitet aus mathematischen Principien.

Wenn zwei Kräfte zu gleicher Zeit auf einen Punkt wirken, so kann dieser natürlich nur eine einzige Bewegung nach einer bestimmten Richtung machen. Dieselbe Bewegung hätte ihm auch von einer einzigen Kraft mitgetheilt werden können und diese ist es, welche der Grösse und Richtung nach in den folgenden Demonstrationen gesucht wird. Bemerken wir nun noch, dass sich eine Kraft durch eine gerade Linie darstellen lässt, indem es nur auf ihre Grösse und Richtung ankommt, so können wir das zu erweisende Theorem folgendermassen fassen:

Die Resultante zweier auf einen Punkt wirkender Kräfte wird der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, welches durch die auf den Richtungen der Kräfte von deren Durchschnittspunkte an und ihnen proportional abgeschnittenen Strecken bestimmt ist.

Um dies Theorem zu beweisen, sind wir gezwungen, über die Wirkungsweise der Kräfte gewisse Annahmen zu machen. Da wir über ihr eigentliches Wesen gar nichts wissen, so müssen diese Annahmen sowohl mit unsern Denkgesetzen in möglichst

1) Nouvelle mécanique. Tome I. Paris 1725. p. 15.

vollkommener Uebereinstimmung stehen, als auch in der Erfahrung ihre Bestätigung finden, wenn ihnen eine gewisse Berechtigung zuerkannt werden soll. Diese Annahmen sind:

I. Die Resultante ist durch die Componenten vollständig und eindeutig bestimmt. (Princip der vollständigen Bestimmtheit).

Hieran schliessen sich 2 specielle Annahmen:

II. Die Richtung der Resultante zweier Kräfte liegt mit den Richtungen der beiden Componenten in derselben Ebene.

III. Die Richtung der Resultante zweier gleichen Kräfte halbirt den Winkel, welchen die Richtungen der beiden Componenten mit einander bilden.

IV. Statt einer Anzahl von Kräften darf stets die Resultirende gesetzt werden und umgekehrt. (Pr. d. Superposition).

V. Die Resultanten zweier ähnlichen Systeme von Kräften, welche je auf einen Punkt wirken, verhalten sich wie zwei einander entsprechende Kräfte. (Pr. d. Homogenität).

VI. Die Resultanten mehrerer an einem Punkt angreifender Kräfte, welche in derselben Richtung wirken, ist gleich ihrer algebraischen Summe.

VII. Bei stetigem Wachsen der Componenten wächst auch die Resultante stetig. (Pr. d. Stetigkeit).

VIII. Der Angriffspunkt einer Kraft darf nach einem beliebigen Punkte in ihrer Richtung verlegt werden, wenn derselbe mit dem ursprünglichen Angriffspunkte fest verbunden ist.

Die Annahmen I. und IV. sind für alle Beweise wesentlich. Beide schliessen zugleich den Satz ein, dass es gleichgültig ist, in welcher Ordnung eine Anzahl von Componenten zusammengesetzt wird, ein Satz, der besonders in den analytischen Beweisen eine häufige Anwendung findet. Die Forderungen II. und III. lassen sich als Folgen von I. ansehen, besonders die erstere, die auch für alle Beweise wesentlich ist. Das Princip der Homogenität wird von allen strengeren Beweisen vorausgesetzt; es scheint aber nicht erforderlich für diejenigen, welche dem von Duchayla gegebenen Beweise nachgebildet sind. Das Princip der Stetigkeit liegt allen mathematischen Beweisen zu Grunde und nur die erste Demonstration von Foncenex stützt sich nicht darauf. Freilich könnte es scheinen, als ob dies Princip für die geometrischen Beweise von keiner Bedeutung sei, da diese durch unendlich oft wiederholte Winkeltheilung allen gegebenen Winkeln beliebig nahe

kommen. Hierin aber zeigt sich gerade die Nothwendigkeit des Princips. Denn man schliesst, weil der Satz vom Parallelogramm für diesen durch Rechnung gefundenen Winkel gilt, so wird er auch für den unendlich wenig davon verschiedenen gegebenen Winkel Gültigkeit haben. Dies setzt also die Annahme voraus, dass sich die Resultante nie sprungweise, sondern immer nur stetig ändere. Auch setzen alle apagogischen Schlüsse, deren Erwähnung bei den späteren Beweisen der Kürze wegen oft unterlassen ist, stets das Princip der Stetigkeit voraus. Das Princip der Verlegung des Angriffspunktes endlich ist charakteristisch für den Beweis von Duchayla und die Gruppe, welche sich demselben anschliesst.

So einfach und selbstverständlich nun diese Grundsätze auch zu sein scheinen, so sind sie es doch, welche der Mechanik die Evidenz und logische Nothwendigkeit der Geometrie nehmen. In der That ist eine ganz andere Wirkungsweise der Kräfte nicht undenkbar. Betrachten wir z. B. Grundsatz VI. Nennen wir Summe zweier gleichen Kräfte eine solche Kraft, welche in einer bestimmten Zeit einen Körper doppelt so weit treibt als jede derselben, so folgt VI. keineswegs unbedingt. Man könnte sich recht gut vorstellen, dass die beiden Kräfte, wenn sie zu gleicher Zeit wirken, sich gegenseitig stören. Dies liesse sich auch annehmen, wenn man den Begriff jener Summe so fasste, dass sie in einer bestimmten Zeit zwei Masseneinheiten ebenso weit treibt, wie die einfache Kraft eine Masseneinheit. Ebenso wenig sind die Grundsätze II. und III. logisch nothwendig, denn der Satz vom zureichenden Grunde kann für keinen strengen Beweis gelten.

Es ergiebt sich nun leicht, dass es genügt, den Satz vom Parallelogramm für einen einfachen Fall zu beweisen, wenn sich aus demselben nur zusammengesetztere Fälle ableiten lassen. Betrachtet man nämlich die drei gegebenen Grössen, zwei zusammen zu setzende Kräfte und den eingeschlossenen Winkel, so findet man sofort, dass sich bei gewissen Annahmen über dieselben der Beweis ungemein vereinfacht. Beschränkt man sich auf zwei gleiche Kräfte, so ist die Richtung der Resultante bekannt und es kommt nur darauf an, die Grösse zu finden. Ebenso kann man bestimmte Annahmen über den Winkel machen. Nimmt man denselben freilich gleich 0 oder π, so erhält man Resultate, welche nicht weiter verwerthet werden können. Eine einfache

Betrachtung aber zeigt, dass bei einem Winkel von 90^0 die Grösse der Resultante, besonders zweier gleichen Kräfte, leicht zu finden ist, sodass nur die Bestimmung der Richtung Schwierigkeiten machen kann. Von einer dieser speciellen Annahmen gehen nun auch die meisten Beweise aus und dieselben könnten danach in Gruppen zusammengefasst werden. Da sie sich aber entweder vorzugsweise auf die Hülfe der Geometrie, oder auf die der Analysis stützen, so theilen wir alle Beweise naturgemässer hiernach ein.

I. Geometrische Beweise.

Dieser Abschnitt enthält diejenigen Beweise, welche vorwiegend constructiv sind und in denen sich die etwa vorkommenden Rechnungen auf niedere Algebra beschränken. Am reinsten constructiv sind durchschnittlich diejenigen, in welchen, wie in dem Beweise von Duchayla, die Kräfte als an mehreren Angriffspunkten wirkend vorgestellt werden.

A. Alle [1]) Kräfte greifen an einem Punkte an.

a. Die Beweise gehen von zwei gleichen Kräften aus.

Beweis von Daniel Bernoulli [2]).

(I. bis VII.)

Der Verfasser beginnt damit, die Grösse der Resultante zweier Kräfte zu bestimmen, welche, unter einem rechten Winkel zu einander geneigt, an demselben Punkte angreifen. Seien (Fig. 1) diese beiden Kräfte P und Q; ihr gemeinschaftlicher Angriffspunkt sei A und ihre Resultante, deren Grösse und Richtung noch unbekannt sind, werde durch R bezeichnet. Wenn P und Q eine Resultante haben, so können wir uns auch sowohl P als Q aus zwei Componenten zusammengesetzt denken, von welchen die eine, p, q, in der Richtung von R, die andere, p', q', aber senkrecht dazu an A wirkt.

---

1) Ausser den beiden zusammen zu setzenden Kräften führen die meisten Beweise noch Hülfskräfte ein.

2) Examen principiorum mechanicae. S. Comment. Acad. Petrop. 1728. Tom. I. p. 126.

Aus

$$Q : R : P = q : Q : q' = p' : P : p$$

ergiebt sich $R = p + q$ und

$$R^2 = P^2 + Q^2 \text{ (II, IV, V, VI)}$$

Sind P und Q gleich, so ist auch die Richtung von R bekannt (III) und die Resultante wird dann der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des Quadrats dargestellt, welches durch die beiden Kräfte bestimmt ist.

Wenn zwei gleiche Kräfte P gleich AB[1]) und AC die Resultante $R = AD$ (Fig. 2) haben, und es soll R auch Resultante der beiden Kräfte P' gleich AE' und AF' sein, welche die Winkel BAD und CAD halbiren, so muss

$$P' = R \sqrt{\frac{P}{2P+R}}$$

sein. Denn aus den Relationen

$$P' : R : P' = p : P' : p \text{ und}$$

$$P : R : P = p : r : p, \text{ folgt, dass}$$

$$R = \frac{P'^2}{P} + \frac{2\,P'^2}{R},$$

woraus der obige Werth von P' resultirt.

Setzen wir Winkel $BAC = \frac{\pi}{2}$, so ist $R = P\sqrt{2}$ und

$$P' = \frac{P\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Denselben Werth erhalten wir aber für die den Winkel BAD halbirende Gerade, welche von A nach der Basis gezogen ist, und allgemein ergiebt sich, dass $R = AD$ auch Resultante zu AG und AH, AJ und AK u. s. f. ist, welche nacheinander die an der Resultante bei A befindlichen Winkel, welche stets von der Form $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ sind, halbiren. Zerlegen wir die beiden gleichen, einen solchen Winkel einschliessenden, Kräfte in je zwei rechtwinklig zu

1) Der Kürze wegen statt: P, dargestellt durch AB.

einander geneigte Componenten, von welchen die eine in die Richtung der Resultante fällt, so ergiebt sich, dass jede der beiden Kräfte der Richtung und Grösse nach gleich der Diagonale des über ihre beiden Componenten construirten Rechtecks ist.

Dieser Satz lässt sich leicht auf zwei unter schiefen Winkeln zusammentreffende Kräfte AB und AC ausdehnen und derselbe wird dadurch allgemein, dass der Satz vom Rhombus, auf den er sich stützt, durch eine freilich umständliche Rechnung für Winkel nachgewiesen wird, welche beliebig gegebenen unendlich nahe kommen (VII).

Bernoulli hat sich dadurch ein grosses auch allgemein anerkanntes Verdienst um die Mechanik erworben, dass er zeigte, auf welche Weise der Beweis des Satzes vom Parallelogramm auf die Mathematik gegründet werden könne. Sein Beweis ist aber sehr weitläufig und erfordert einen grossen Aufwand von Rechnung. Er machte daher weitere Versuche auf diesem Gebiete nicht unnöthig.

Beweis von D'Alembert [1]).

(I. bis VII.)

Der Verfasser geht von drei unter Winkeln von 120^0 zusammentreffenden gleichen Kräften aus, für welche die Richtigkeit des Theorems sich leicht ergiebt. Auf rein geometrischem Wege beweist er dann den von Bernoulli analytisch bewiesenen Lehrsatz. Wenn zwei gleiche Kräfte AB und AC die Resultante $AD = 2Ad$ haben (Fig. 3), so gehört dieselbe Resultante auch zu den beiden gleichen Kräften AE und AF, welche die Winkel BAD und CAD halbiren. Ziehen wir EL parallel AD, so ist

$$AL : AE = AE : AD.$$

Würden wir annehmen, die Resultante von AE und AF sei $> AD$, also etwa gleich $AD + DD'$, so dass

$$AC : AE = AE : AD',$$

so liesse sich leicht zeigen, dass daraus gerade gegen die Voraussetzung folgte, dass $AD' < AD$ ist. Auch die Annahme

---

1) Opuscules math. Tome I p. 169. Paris 1761.

$AD' < AD$ führt auf einen Widerspruch. Es ist also allgemein bewiesen, dass die Resultante zweier gleichen Kräfte, die unter einem Winkel von der Form $\frac{120^0}{2^n}$ angreifen, gleich der Diagonale des über die Kräfte construirten Rhombus ist.

Der Verfasser zeigt dann, dass dieser Satz allgemein für alle Winkel von der Form $\frac{120^0}{2^n} \cdot p$ Gültigkeit hat. Durch passende Wahl von p und n, welche positive ganze Zahlen bedeuten, können wir nun jedem Winkel beliebig nahe kommen und es ist also der Satz vom Parallelogramm allgemein bewiesen.

Dieser Beweis ist entschieden einfacher und übersichtlicher als der von Bernoulli gegebene; er stützt sich indess auch auf unendlich oft wiederholte Winkeltheilung.

b. Die Beweise gehen von zwei senkrecht gegen einander wirkenden Kräften aus.

Beweis von Lambert [1]).

(I. bis VII.)

Die Grösse der Resultante leitet der Verfasser wie Bernoulli ab. Es kommt also nur auf die Bestimmung der Richtung an. Seien AB und AC (Fig. 4) die beiden rechtwinklig zu einander geneigten Kräfte und AD ihre Resultante, deren Richtung noch unbekannt ist. Bezeichnen wir den Hypotenusenwinkel BCA mit φ, sodass

$$AB = BC \cdot \sin \varphi = AD \sin \varphi \text{ und } AC = AD \cdot \cos \varphi,$$

und mit ω den Richtungswinkel DAC der Resultante, so wird die Aufgabe gelöst sein, wenn das Verhältniss zwischen dem bekannten φ und dem unbekannten ω gefunden ist.

Seien $AC = AD = 1$ (Fig. 5) zwei Kräfte, welche mit der Anfangsrichtung AX die Winkel ω und ω' bilden. Wir zerlegen beide nach den senkrecht auf einander stehenden Richtun-

1) Beiträge zum Gebrauch der Mathematik. Berlin 1770. Theil II p. 468.

gen AX und AY in die Componenten $\cos\varphi$, $\cos\varphi'$ und $\sin\varphi$, $\sin\varphi'$. Ebenso lässt sich die Kraft $AE = 1$, welche mit AX den Winkel $\omega + \omega'$ bildet, nach den beiden senkrecht gegen einander geneigten Richtungen AC und AF in die Componenten $\cos\varphi'$ und $\sin\varphi'$ zerlegen. Diese beiden aber geben nach den Richtungen AX und AY die Componenten

$$\cos\varphi \,.\, \cos\varphi' - \sin\varphi \,.\, \sin\varphi' \text{ und } \sin\varphi \,.\, \cos\varphi' + \cos\varphi \,.\, \sin\varphi'$$

d. h. $\cos(\varphi + \varphi)$ und $\sin(\varphi + \varphi')$.

Es entspricht also dem Winkel

ω der Winkel φ und dem Winkel

$m\omega$ „ „ $m\varphi$, woraus wir sehen, dass

das Verhältniss zwischen beiden Winkeln ein constantes ist, d. h.

$$\varphi = n\omega.$$

Aus dem Specialfall $\omega = \frac{\pi}{2}$, welcher $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergiebt, erhalten wir $n = 1$ und

$$\varphi = \omega.$$

Die Resultante der beiden Kräfte AB und AC stimmt also auch der Richtung nach mit der Diagonale des über beide construirten Rechtecks überein.

Im vorliegenden Referat sind alle Ausführungen und strengeren Begründungen, welche den Originalbeweis sehr umfangreich machen, ausgelassen; es scheint aber, als wenn dieser kurze Abriss zu einem vollständigen Beweise genüge.

Beweis von Eytelwein [1]).

(I. bis VII.)

Wie Lambert sucht E. das Verhältniss zwischen dem Hypotenusenwinkel φ und dem Richtungswinkel ω. (Fig. 6).

Wenn zum Richtungswinkel ω der Hypotenusenwinkel φ gehört, so entsprechen sich auch 2ω und 2φ. Die Resultante R

1) Handbuch der Statik. Berlin 1808. St. 1.

der beiden Kräfte P und Q bilde mit P den Winkel ω. Denken wir uns durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt A von P und Q die Gerade DAE, welche mit der Richtung von P den Winkel ω bildet und ausserhalb des Kräftewinkels liegt, und senkrecht dazu AF gezogen, so können wir P und Q nach diesen beiden Richtungen in die Componenten S und T zerlegen.

Es ergiebt sich

$$S = \frac{P^2 - Q^2}{R} \text{ und } T = \frac{2PQ}{R}$$

Setzen wir $P = R \cos\varphi$ und $Q = R. \sin\varphi$, so ist

$$S = R \cos 2\varphi \text{ und } T = R. \sin 2\varphi, \text{ wie oben}$$

behauptet wurde. Es ist also der Satz vom Parallelogramm (in diesem Falle Rechteck) für alle Winkel von der Form $2^n.\omega$ bewiesen. Durch eine ähnliche Zerlegung wird derselbe auf die Winkel $(n + 1)\omega$ und $(n + 1)\varphi$ ausgedehnt, wobei die Gültigkeit für $n\omega$ und $n\varphi$ vorausgesetzt wird. Dadurch ist allgemein nachgewiesen, dass das Verhältniss zwischen beiden Winkeln constant ist, sodass $\varphi = n\omega$.

Da nun bei $\omega = \frac{\pi}{4}$ auch $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist, so ergiebt sich $\varphi = \omega$;

d. h. es fällt die Richtung der Resultante mit der Diagonale zusammen.

Beweis von Schlömilch [1]).

(I. bis VII.)

Man denke sich im Raume 3 auf einen Punkt wirkende gegen einander senkrechte Kräfte (Fig. 7), welche durch die Geraden $OA = X$, $OB = Y$ und $OC = Z$ dargestellt werden mögen, und es sei OD die Resultante von X und Y, OE die von Y und Z und OF die aller drei Kräfte.

Es ist nun

$$\text{tang } AOF = X\frac{FG}{OG} = \frac{GH:OG}{GH:FG} = \frac{\text{tang } AOD}{\cos BOE}$$

1) Schlömilch Zeitschrift für Math. und Physik. Jahrgang 1860. St. 435.

oder $\text{tang}\, AOF = \text{tang}\, AOD \,.\, \sqrt{1 + \text{tang}^2 BOE}.$

Setzen wir nun als bekannt voraus, dass die Resultante zweier rechtwinklig auf einen Punkt wirkenden Kräfte P und Q gleich $\sqrt{P^2 + Q^2}$ ist, und bezeichnen wir den Winkel, welchen sie mit der Componente P bildet, durch (P, Q), so verwandelt sich obige Gleichung in die folgende Functionalgleichung

1) $\text{tang}\,(X, \sqrt{Y^2 + Z^2}) = \text{tang}\,(X, Y) \,.\, \sqrt{1 + \text{tang}^2 (Y, Z)}.$

Für $X = Y = Z$ wird daraus

$$\text{tang}\,(X, X\sqrt{2}) = \sqrt{1 + \text{tang}^2 45^0} = \sqrt{2}.$$

Nehmen wir in No. 1) $Y = X$ und der Reihe nach $Z = X\sqrt{2}$, $X\sqrt{3}$, $X\sqrt{4}$, so erhalten wir

$$\text{tang}\,(X, X\sqrt{3}) = \sqrt{3}; \quad \text{tang}\,(X, X\sqrt{4}) = \sqrt{4} \text{ und}$$

2) allgemein $\text{tang}\,(X, Xn) = n = \frac{Xn}{X}$, unter n^2 eine ganze und positive Zahl verstanden.[1]

Substituiren wir ferner in Gleichung 1)

$X = P$, $Y = Q$ und $Z = Q$, $Q\sqrt{2}$, $Q\sqrt{3}$ u. s. f., so erhalten wir

$\text{tang}\,(P, Q\sqrt{2}) = \text{tang}\,(P, Q)\sqrt{2}$

$\text{tang}\,(P, Q\sqrt{3}) = \text{tang}\,(P, Q)\sqrt{3}$ u. s. w. und allgemein, wenn m^2 eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$\text{tang}\,(P, Q) = \frac{\text{tang}\,(P, mQ)}{m}$$

Wenn nun $mQ = nP$, so folgt

$$\text{tang}\,(P, Q) = \frac{n}{m} = \frac{Q}{P}.$$

Hiermit ist die Lage der Resultante für alle rechtwinklig zu einander wirkenden Kräfte bestimmt, deren Intensitäten in einem rationalen Verhältniss stehen.

---

1) Schlömilch Zeitschrift für Math. und Physik. Jahrgang 1860. St. 435.

Es möge noch der auf einer neuen Annahme, ausser I. bis VI. beruhende Beweis von Scarella [1]) kurz angeführt werden. Nachdem S. die Grösse und Richtung der Resultante zweier gleichen Kräfte und deren Grösse bei zwei ungleichen unter rechten Winkeln zusammentreffenden Kräften gefunden, sucht er für die Resultante der ungleichen Kräfte die Richtung. Wenn die Resultante nicht in die Richtung der ihr an Grösse gleichen Diagonale fällt, so muss sie entweder nach der grössern oder nach der kleinern Kraft hin abweichen und aus dem über die Kräfte construirten Rechteck heraustreten. Dann aber müsste eine der Kräfte in einer Richtung wirken, welche mit der eigenen einen rechten Winkel bildet.

c. Die Beweise machen keine Voraussetzungen über die Kräfte oder ihre Richtungen.

Beweis von Burg [2]).

Durch die Grösse und Richtung der Componenten und durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel ist die Grösse und Richtung der Resultante vollkommen bestimmt. Dasselbe muss für ihre linearen Darstellungen gelten. Sind also AB und AC die beiden Kräfte und α der eingeschlossene Winkel, so muss die Resultante AD in diesen Winkel fallen und durch die beiden Geraden und α völlig bestimmt sein. Das ist aber nach den Sätzen der Tetragonometrie nur dann möglich, wenn AD Diagonale des durch AB, AC und α bestimmten Parallelogramms ist.

Die Abhängigkeit, welche zwischen den Kräften existirt, darf nicht ohne Weiteres auf ihre linearen Darstellungen übertragen werden und selbst wenn man dies zugiebt, lässt sich sehr wohl eine andere Art der Abhängigkeit denken. Der Beweis ist also werthlos.

Schon Pater Scherffer [3]) machte eine ähnliche Anwendung von den Lehren der Tetragonometrie. Seine Beweisführung ist aber noch weniger streng als die vorige.

1) Physica generalis meth. math. tract. Brixiae 1756.
2) Crelle's Journal für Math. Band I. St. 369.
3) Institutiones mechanicae. Vindob. 1773. Pars I. p. 22.

Beweis von Möbius [1]).

(I. bis VII.)

Sei $ABDC$ ein Parallelogramm und AD eine Diagonale desselben. Zieht man durch A in beliebiger Richtung eine gerade Linie und projicirt darauf die Geraden AB, AC und AD, so findet unter den Projectionen folgendes Verhältniss statt:

$$AD' = AB' + AC',$$

wobei zu bemerken ist, dass Projectionen, welche nach entgegengesetzten Seiten von A fallen, entgegengesezte Vorzeichen erhalten. Es werde vorläufig angenommen, dass $\angle BAD$ und $\angle CAD$ mit π in einem rationalen Verhältniss stehen, sodass

$$\angle BAD : \pi = b : m \text{ und}$$
$$\angle CAD : \pi = c : m.$$

Man lege jetzt durch den Punkt A mGerade, welche mit einander Winkel von der Grösse $\frac{\pi}{m}$ einschliessen und lasse AB, AC und AD mit je einer derselben zusammenfallen. Projicirt man diese drei Geraden auf jede der mLinien und betrachtet alle diese Projeetionen der Grösse und Richtung nach als auf den Punkt A wirkende Kräfte, so hat man mSysteme von je drei Kräften, von welchen immer AD' die Resultante der beiden andern AB' und AC' ist. Es ist daher auch das System

$\Sigma AD'$ Resultante der Systeme $\Sigma AB'$ und $\Sigma AC'$.

Bezeichnet man nun mit P, Q, R der Reihe nach die Resultanten der Systeme $\Sigma AB'$, $\Sigma AC'$, $\Sigma AD'$, so ist bewiesen, dass die Kraft R die Resultante der beiden Kräfte P und Q ist. Da nun P, Q und R mit einander in demselben Verhältniss stehen wie AB, AC und AD, und zugleich in deren Richtungen fallen (III u. V), so müssen auch die Kräfte AB und AC die Resultante AD haben. Diese ist aber nach der Annahme die Diagonale des durch AB und AC bestimmten Parallelogramms.

Durch apagogische Schlüsse lässt sich dann der Satz auch auf die Fälle ausdehnen, dass die Winkel BAD und CAD entweder unter sich oder als Summe mit π in keinem rationalen Verhältniss stehen.

---

1) Crelle's Journal. Bd. 42. St. 179. 1851.

B. Die Kräfte greifen an verschiedenen Punkten an.

Die hierher gehörigen Beweise unterscheiden sich von den übrigen in dieser Abtheilung dadurch, dass in ihnen

1) das Princip der Verlegung des Angriffspunktes in ausgedehnter Weise zur Anwendung kommt und

2) das Princip der Superposition in der Weise benutzt wird, dass die zusammen zu setzenden Kräfte als Resultanten einer Anzahl in derselben Richtung, aber an verschiedenen Punkten angreifender Theilkräfte angesehen werden, welche in selbstständige Verbindungen treten.

Diese Beweise machen also eine neue Annahme über das Wesen der Kräfte und stehen deshalb den übrigen Beweisen in dieser Abtheilung trotz ihrer Kürze und Einfachheit nach, sind indess zu einer elementaren Begründung des Satzes vom Parallelogramm sehr geeignet.

Beweis von Duchayla [1]).

(I. bis IV. VI. bis VIII.)

Es seien (Fig. 8) $P = AB$ und $Q = AC$ zwei an A wirkende Kräfte und α der Winkel, welchen sie einschliessen. Zur Bestimmung der Richtung genügt es, einen Punkt auszumitteln, nach welchem P und Q verlegt werden dürfen. Wir denken uns P aus den beiden Theilen p und p' zusammengesetzt. Q und p müssen eine Resultante haben, deren Richtung in den Winkel α fällt. Durch einen Punkt D derselben legen wir die Geraden KL und FG parallel zu AB und AC, versetzen dann Q und p nach D, und Q wieder nach F in AB. Im Punkte F lassen wir nun auch p' angreifen, und diese Kraft möge mit Q eine Resultante haben, welche KL in E schneidet. An diesen Punkt lassen sich jezt Q und p', sowie von D her p verlegen; er liegt deshalb in der Richtung der Resultante von P und Q. Es ist also nur die Aufgabe, die Lage von E zu bestimmen. Dies kann geschehen durch die Ermittelung des Verhältnisses zwischen den Coordinaten dieses Punktes, indem wir die Richtungen von AB und AC als die X, resp. YAchse ansehen. $P = Q = a$ ergiebt $x = y$. Wenn aber $Q = a$ und $P = 2a$, so findet sich nach der obigen Me-

1) Correspondance de l'Ecole polytechnique. Paris 1808. Nr. 4. Der Beweis findet sich auch u. A. in Francoeur, élémens de statique. Paris 1810. p. 9.

thode $x = 2$, wenn $y = 1$ ist. Allgemein ergiebt dieselbe: die beiden Kräfte $P = ma$ und $Q = na$ haben eine Resultante, deren Richtung durch die Proportion

$$x : y = m : n$$

bestimmt ist. Durch einen apagogischen Schluss lässt sich dieser Beweis auch auf den Fall ausdehnen, dass P und Q incommensurabel sind.

Die Grösse der Resultante lässt sich nun ohne Schwierigkeit nach der von Kästner [1]) mitgetheilten Methode bestimmen.

Es sei R die der Grösse nach noch unbekannte Resultante von P und Q (Fig. 9). Bezeichnen Q' und R' Kräfte, welche Q und R gleich, aber entgegengesetzt sind, so muss Q' die Resultante von P und R' sein. Q' fällt nach dem Obigen auf die Diagonale eines Parallelogramms, welches in diesem Falle durch die Grössen und die Richtungen von P und Q' vollkommen bestimmt ist. Es ist also jezt R' und damit auch R der Grösse nach gefunden und zwar ergiebt sich durch die Construction, dass R gleich der Diagonale des über P und Q construirten Parallelogramms ist.

Der Beweis von Matzka [2]).
(I. bis IV. VI. bis VIII.)

in welchem das Princip der Verlegung des Angriffspunktes nur wenige Male zur Anwendung kommt, ist eine analytische Umänderung des vorigen Beweises. Wir benutzen die vorige Figur.

Die Richtung der Resultante wird bestimmt sein, wenn ihr Durchschnitt mit der Linie KL gefunden ist, welche AB parallel läuft. Die Abscissen der Punkte, in welchen die Resultanten der an A angreifenden Kräfte Q und p, respective Q und p' die Gerade KL schneiden, seien x, resp. x'. Wie der erste Theil des vorigen Beweises ergiebt, schneidet dann die Resultante der Kräfte Q und $p + p'$ die Linie KL in einem Punkte, dessen Abscisse $x + x'$ ist. Folglich gilt bei sonst gleichen Verhältnissen folgende Proportion

1) Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Göttingen 1780. St. 31.

2) Abhandl. d. Königl. Böhm. Gesellschaft d. Wiss. V. Folge. 9. Bd. Siehe ein Referat darüber in Schlömilch's Zeitschrift. Jahrgang I. Lit. Ztg. St. 111.

$$P : P_1 = x : x_1.$$

Setzen wir $P_1 = Q$, so wird $x_1 = y$. Wir haben also allgemein

$$P : Q = x : y.$$

Beweis von Duhamel[1]).
(I. bis V. VI. bis VIII.)

Derselbe ist eine constructive Umänderung des Beweises von Duchayla.

Seien $P = AB$ und $Q = AC$ die beiden Kräfte und sei $P : Q = m : n$. Wir theilen AB in m und AC in n gleiche Theile und lassen an jedem Theilpunkt von AB mit Einschluss von A die Kräfte $\frac{P}{m}$, und an jedem Theilpunkt von AC wieder mit Einschluss von A die Kraft $\frac{Q}{n}$ wirken. Haben wir nun das durch AB, AC und den eingeschlossenen Winkel bestimmte Parallelogramm $ABDC$ nach diesen Theilpunkten in $m.n$ Rhomben zerlegt, so ergiebt eine wiederholte Verlegung leicht, dass sich alle Kräfte $\frac{P}{m}$ an die entsprechenden Punkte der AB nächsten Parallele EF und die Kraft $\frac{Q}{n}$ von A nach und nach an F versetzen lassen. Wiederholen wir dies n Mal, so ist P sowohl wie Q nach D verlegt. Folglich fällt die Richtung der Resultante mit der Diagonale zusammen.

Beweis von Sturm[1]).
(I. bis IV. VI. bis VIII.)

Wenn an den beiden entgegengesetzten Eckpunkten A und D (Fig. 10) eines Rhombus $ABDC$ von unveränderlicher Form je zwei gleiche Kräfte nach den Richtungen AB, AC und DB, DC wirken, so ist derselbe im Gleichgewicht.

Sind die beiden zusammen zu setzenden Kräfte $P = AB$

---

1) Lehrbuch der analyt. Mechanik. Deutsch von Schlömilch. Leipzig 1861. Bd. I. p. 10.

2) Cours de mécanique de l'Ecole polytechnique. Publié par Pronhet. Paris 1861. Tome I. p. 3.

$= m$ und $Q = AC = n$, so theilen wir das Parallelogramm $ABDC$ in $m \,.\, n$ Rhomben. Legen wir nun, wie die Figur andeutet, in die Ecken $B_1\ C_1\ ;\ B_2\ C_2\ \ldots\ldots$ der kleinen Rhomben je zwei Kräfte gleich $\frac{P}{m} = \frac{Q}{n}$, so ergiebt sich durch den Augenschein, dass die an A in den Richtungen AB und AC wirkenden Kräfte P und Q durch die neu angebrachten aufgehoben werden, dafür aber wieder in den Richtungen CD und BD auftreten. Es lassen sich also die Kräfte P und Q nach D verlegen.

Hieran schliesst sich ein von Möbius in seiner Statik gegebener Beweis. Seien P und Q die beiden zusammen zu setzenden Kräfte und R ihre noch unbekannte Resultante. Denken wir uns in der Richtung der letztern eine feste Gerade und bringen an irgend einem Punkte derselben zwei den gegebenen gleiche Kräfte, aber in entgegengesetzter Richtung an, so werden diese eine gleich grosse aber entgegengesetzte Resultante haben und folglich mit den ersten beiden Kräften im Gleichgewicht sein. Verlängern wir nun die Richtungen der vier Kräfte, bis sie sich schneiden, so entsteht ein Parallelogramm, und es ergiebt sich was die Richtung anbetrifft, der zu erweisende Satz sofort. Zur Bestimmung der Grösse dient eine ähnliche Schlussfolge wie die von Kästner angewandte.

II. Analytische Beweise.

Diese Beweise sind sämmtlich auf dasselbe einfache Princip gegründet. Offenbar muss das Gesuchte von dem Gegebenen abhängig sein, sodass es als Funktion des letztern aufgefasst werden kann. Fügen wir nun den gegebenen noch Hülfskräfte hinzu, welche an demselben Punkte wie die ersten angreifen, so können wir alle Kräfte auf zwei verschiedene Weisen zu einer Resultante zusammensetzen. Dadurch gelangen wir zu einer Funktionalgleichung, welche mit Hülfe der höhern Analysis und mit Benutzung bekannter Specialwerthe aufgelöst werden muss.

a. Die Beweise gehen von gleichen Kräften aus.

Der erste zeichnet sich vor allen übrigen dadurch aus, dass er nicht wie diese auf das Princip der Stetigkeit gegründet ist

1. Beweis von Foncenex[1]).

(I. bis II.)

Die Resultante R zweier gleichen Kräfte P, welche einen Winkel 2φ einschliessen, werde durch $p.\ P$ bezeichnet. Bei den Winkeln

$2\ n.\ \varphi$ sei R bezeichnet durch $p_n \cdot P$

$2\ (n+1)\ \varphi$ „ $p_{n+1} \cdot P$

$2\ (n+2)\ \varphi$ „ $p_{n+2} \cdot P$.

Es sei jetzt die Aufgabe, 4 an demselben Punkte angreifende Kräfte zusammenzusetzen, von welchen 2 die Winkel $\pm n\varphi$, die beiden andern $\pm (n+2)\ \varphi$ mit der Anfangsrichtung einschliessen. Nach den obigen Annahmen geben diese beiden Resultanten

$$p_n P \text{ und } p_{n+2} P.$$

Setzen wir aber erst je zwei nach derselben Seite der Anfangsrichtung wirkende zusammen und dann die beiden Resultanten zu einer Gesammtresultante, so erhalten wir

$p_{n+1} \cdot p \cdot P$. Es ist also

$p_{n+1} \cdot p \cdot P = p_n \cdot P + p_{n+2} \cdot P$, oder

$p_{n+2} - p \cdot p_{n+1} + p_n = 0$.

Hieraus ergiebt sich

$p_n = Dx^n + E\,x^n$, wobei D und E Constanten bezeichnen. x und y sind die Wurzeln der Gleichung $u^2 - p\,u + 1 = 0$, also

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - 1\right)} \text{ und}$$

$$y = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - 1\right)}.$$ Werden diese Werthe eingesetzt, so erhalten wir

---

1) De la Composition des Forces. S. Mélanges de philosophie et mathém. pour 1760—61. Turin. St. 305.

$$p_n = D\left[\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - 1\right)}\right]^n + E\left[\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - 1\right)}\right]^n$$

Setzen wir

$$p = 2 \cos \varphi, \text{ so entsteht aus dem Vorigen}$$
$$p_n = (D + E) \cos n\varphi + i\,(D - E) \sin n\varphi$$
$$= F \cos n\varphi + G \cdot \sin n\varphi.$$

Aus $n = 0$ und $n = 1$ ergiebt sich $p_n = 2 \cos n\varphi$ und schliesslich

$$R = 2\,P \cos x.$$

2. *Beweis von Foncenex* [1]).

(I. bis VII.)

Auf einen Punkt A (Fig. 11) mögen die beiden gleichen Kräfte P wirken, welche mit der Anfangsrichtung AR die Winkel $+ x$ und $- x$ bilden. Ihre Resultante R, welche in die Anfangsrichtung fällt, muss abhängig von P und X sein, sodass

$$R = \varphi\,(P,x) = \mathrm{P} \cdot \varphi(x) = Py$$

gesetzt werden darf. Da sich nun mit x auch y ändert, so gehören zusammen

Winkel	x	und Funktion	y
„	$x+dx$	„ „	$y+dy = y'$
„	$x+2dx$	„ „	$y+2dy+d^2y = y''$

Setzen wir $dy = u \cdot dx$ und geben u den Werth v, wenn $x = 0$ ist, so wird, wenn x den Werth dx hat,

$$y = 2 + v \cdot dx.$$

Denken wir uns ausser den beiden schon aufgeführten Kräften P in den Richtungen $\pm x$ noch zwei Hülfskräfte P von gleicher Grösse in den Richtungen $\pm (x + 2\,dx)$ an A angebracht und setzen diese vier Kräfte wie im vorigen Beweise auf zwei Weisen zu einer einzigen Resultante zusammen, so erhalten wir die Funktionalgleichung

---

1) De la Composition des Forces. S. Mélanges de philosophie et mathém. pour 1760—61. Turin S. 305.

$y + y'' = (2 + vdx)\, y'$ d. h.

$d^2y = v.y.dx + v\,.\,dy\,.\,dx$, oder mit Vernachlässigung des letzten Gliedes

$$d^2y = y.v.dx \text{ und}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = c.y.$ Hieraus ergiebt sich sofort

$$y = Ae^{x\sqrt{c}} + Be^{-x\sqrt{c}},$$

$$dy = \sqrt{c}\,(Ae^{x\sqrt{c}} - Be^{-x\sqrt{c}})\,dx.$$

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir $x = 0$. Dann ist

$$y = 2 = A + B$$

$dy = \sqrt{c}\,(A-B)\,dx = v\,.dx = c\,.dx^2$; folglich $A-B = \sqrt{c}\,.dx = 0$. Es ist also $A = B = 1$ und

$$y = e^{x\sqrt{c}} + e^{-x\sqrt{c}} = 2\cos(x\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{c})$$

Die Constanten c erhalten wir durch die Substitution $x = \frac{\pi}{2}$

Diese giebt

$R = 2\,P\cos(2\,m + 1)\,x$. Hiernach würde $R = o$, wenn $(2\,m + 1)\,x = \frac{\pi}{2}$. In der That verschwindet es aber nur, wenn $x = \frac{\pi}{2}$; folglich ist $m = 0$ und

$$R = 2\,P\cos x.$$

Es ist nun leicht, die Resultante zweier ungleichen, erst unter rechten, dann unter beliebigen Winkeln zusammen wirkenden Kräfte zu bestimmen. Das kann sowohl mit Hülfe der Rechnung, wie bei Foncenex, als auch der Construction geschehen.

Die Ableitung von $A - B = 0$ aus $A - B = \sqrt{c}\,.\,dx$ ist nicht befriedigend.

Der *Beweis von D'Alembert*[1]) (I. bis VII.) ist ganz ähnlich. Die Funktionalgleichung

$$P.\varphi x + P\varphi(x+2y) = P.\varphi x.\varphi(x+y)$$

ergiebt

$$\varphi x = e^{x\sqrt{c}} + e^{-x\sqrt{c}},$$

---

1) Mémoires de l'Acad. des Sciences. 1769. p. 278.

und aus dem Specialwerth $x = \frac{\pi}{2}$ folgt

$$\varphi(x) = e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x. \quad \text{Demnach ist}$$

$$R = 2 P \cos x.$$

Die Auflösung der Funktionalgleichung ist erst von Schlömilch in seinem unten folgenden Beweise kurz und streng gegeben. Freilich zeigt dieselbe, wie auch die von D'Alembert selbst gegebene [1]), dass sie der Anwendung des unendlich Kleinen nicht entbehren kann.

Poisson [2]) (I. bis VII.)

bringt die Funktionalgleichung

$$\varphi(x) + \varphi(x + 2z) = \varphi(z) \cdot \varphi(x + z)$$

durch die Substitution $x + z = x$ auf die Form

$$\varphi(x) \cdot \varphi(z) = \varphi(x - z) + \varphi(x + z). \quad \text{I}$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite der Gleichung werden durch die Taylor'sche Reihe entwickelt; es ergiebt sich

$$\varphi(z) = 2 \left\{ 1 + \frac{\varphi''x}{\varphi(x)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{\varphi''''x}{\varphi x} \cdot \frac{z^4}{4!} + \ldots \right\}$$

Weil z von x gänzlich unabhängig ist, so müssen die Factoren in der Klammer, welche x enthalten, Constanten sein. Setzen wir $\frac{\varphi''x}{\varphi x} = c$, so erhalten wir durch Differentiation

$$\varphi^{IV}(x) = c\varphi''(x) = c^2\varphi(x).$$

Die Substitution $c = -a^2$ ergiebt

$$\varphi(z) = 2 \left(1 - \frac{a^2z^2}{2!} + \frac{a^4z^4}{4!} - \ldots\right) = 2 \cos az.$$

Hieraus folgt dann allgemein (s. d. Beweis von Foncenex)

$$\varphi(x) = 2 \cos x. \quad \text{II.}$$

---

1) Histoire de l'Acad. de Berlin 1750 p. 355.
2) Traité de mécanique, Paris 1811.

In der zweiten Auflage seiner Mechanik [1]) giebt P. die Auflösung der Gleichung I. ohne Ableitung mit

$$\varphi(x) = 2 \cos x.$$

Dass dies aber die einzige Lösung sei, wird durch den Nachweis dargethan, dass sie für alle Werthe des x von der Form $\frac{m\alpha}{2^n}$ Gültigkeit hat, wobei α einen Spezialwerth des Winkels x bezeichnet, sowie m und n beliebige ganze positive Zahlen anzeigen. Denn da in dieser Form alle möglichen Werthe von x enthalten sind und da die Resultante, also auch $\varphi(x)$ für jedes x nur einen einzigen Werth haben kann (I), so existirt keine andere Lösung für Gleichung I.

Dieser Beweis ist strenger als alle früheren und verdient auch den Vorzug vor dem in der ersten Auflage gegebenen, da dieser von der unerwiesenen Voraussetzung ausgeht, dass sich $\varphi(x)$ in einer Reihe entwickeln lasse. Es bleibt aber eine wirkliche Ableitung der Gleichung II. wünschenswerth.

Eine elementare Ableitung derselben liefert Dippe [2]) in seinem Beweise für den Satz vom Parallelogramm. D. setzt $R = 2\ P\varphi(x)$ und gelangt zu der Gleichung

$$(1) \quad 2\ \varphi(x).\ \varphi(z) = \varphi\ (x+z) + \varphi(x-z).$$

Da stets $0 < R < 2\ P$ und zugleich $R = 2P\varphi(x)$, so muss $0 < \varphi(x) < 1$ sein. Wir dürfen also $\varphi(x) = \cos\ \omega$ setzen, wo $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

Für $z = 0$ giebt Gleichung (I) $\varphi(0) = 1 = \cos\ 0$, und für $2\ x = 120^0$ ist

$$\varphi(60^0) = \frac{1}{2} = \cos\ 60^0.$$

Es gilt also die Annahme $\varphi(x) = \cos\ (x)$ für $x = 0$ und $x = 60^0$ und daraus folgert D. nach einer Methode, die von der Poisson's wenig abweicht, dass allgemein

$$\varphi(x) = 2 \cos x.$$

---

1) Traité de mécanique. Paris 1833. I. p. 45.
2) Grunert's Archiv 1843. Theil III. p. 329.

Eine strenge Ableitung findet sich in dem folgenden Beweise.

Beweis von Schlömilch [1]).

(I. bis VII.)

Aus der Funktionalgleichung

$$\varphi(x+2\delta) + \varphi(x) = \varphi(\delta) \cdot \varphi(x+\delta) \qquad \text{I}$$

ergiebt sich

$$\frac{\varphi(x+2\delta) - 2\varphi(x+\delta) + \varphi(x)}{\delta^2} = \frac{\varphi(\delta) - 2}{\delta^2} \cdot \varphi(x+\delta).$$

Durch den Uebergang zur Grenze erhalten wir

$$\varphi''(x) = \frac{0}{0} \cdot \varphi(x), \text{ und da } \frac{0}{0} \text{ von } x \text{ unabhängig ist,}$$

$\varphi''(x) = c \cdot \varphi(x)$. Die Integration liefert

$$\varphi(x) = A e^{x\sqrt{c}} + B e^{-x\sqrt{c}}. \qquad \text{II.}$$

Die Integrationsconstanten A und B ergeben sich, wenn wir für die Funktionen in I ihre durch II bestimmten Werthe setzen. Wir finden

$$A = B = 1.$$

Der specielle Werth $x = \frac{\pi}{2}$ ergiebt aus (II)

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{c}} + e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{c}} \text{ oder}$$

$0 = e^{\pi\sqrt{c}} + 1$. Es ist also

$$\varphi(x) = e^{imx} + e^{-imx} = 2 \cos mx.$$

$mx = \frac{\pi}{2}$ giebt $\varphi(x) = 0$. Das Letztere kann aber nur stattfinden bei $x = \frac{\pi}{2}$; folglich ist $m = 1$ und

$$R = 2P \cos x.$$

---

1) Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Phys. 1857. Jahrgang II, p. 85.

Hiermit wollen wir die erste Reihe der analytischen Beweise beschliessen. Zwar hat Wachter [1]) noch einen hierher gehörigen Beweis veröffentlicht; aber derselbe kann füglich fortbleiben, da er sowohl in Bezug auf Strenge als auch ganz besonders auf Eleganz dem von Poisson früher gegebenen weit nachsteht.

b. Die Beweise gehen von rechtwinklig zu einander auf einen Punkt wirkenden Kräften aus.

Wie Bernoulli gezeigt hat, lässt sich die Grösse der Resultante sehr leicht finden, wenn die beiden Kräfte einen rechten Winkel mit einander bilden. Es kommt also im Folgenden nur auf die Bestimmung der Richtung an. Offenbar ist der Winkel, welchen die Resultante mit einer der beiden Componenten bildet, abhängig von dem Verhältniss der letzteren zu einander. Es kann also der Winkel als eine Funktion des Verhältnisses angesehen werden. Umgekehrt lässt sich auch das Verhältniss zwischen den beiden Componenten als eine Funktion des Winkels ansehen. Die Beweise, welche der ersteren Anschauung entsprechen, mögen zuerst folgen.

Beweis von Venini [2]).

(I. bis VII.)

$P = AB$ und $Q = AC$ seien unter einem rechten Winkel zu einander geneigt. Jede derselben können wir als Resultante zweier gleichen unter rechten Winkeln zusammen wirkenden Kräfte betrachten, von welchen je eine in die Richtung der den Winkel BAC halbirenden Geraden fällt. Die beiden letzteren sind zusammen gleich $S = \frac{P+Q}{\sqrt{2}} = AD$, während die senkrecht dazu wirkenden gleich $T = \frac{P-Q}{\sqrt{2}} = AE$ sind.

---

1) Commentatio de elementis quae ad Corp. coel. Revolut. circa propr. Axem spectant. Gottingae 1815.

2) Journal des Savants, 1764. p. 419.

Es lässt sich nun leicht beweisen, dass das Rechteck über S und T dieselbe Diagonale hat wie das über P und Q. Da sich die Richtung der Resultante einer Componente um so mehr nähert, je mehr diese die andere Componente an Grösse übertrifft, so gilt fdlgende Gleichung (?), in welcher $x = \angle\,(R,P)$

$$\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \text{tang } x = f\left(\frac{Q}{P}\right)$$

Nun ist $f\left(\frac{Q}{P}\right)$ entweder $> \frac{Q}{P}$ oder $< \frac{Q}{P}$ oder $= \frac{Q}{P}$.

Durch eine kurze Betrachtung findet Venini, dass

$\text{tang } x = \frac{Q}{P}$ sein muss, und hieraus folgt, dass die Richtung der Resultante mit derjenigen der Diagonale übereinstimmt.

Diese Schlüsse verwirft D'Alembert als unmotivirt und vermeidet sie deshalb in seinem folgenden Beweise.

Beweis von D'Alembert [1]).

(I. II. IV. bis VII.)

Es seien $P = AB$ und $Q = AC$ die beiden rechtwinklig zu einander auf den Punkt A wirkenden Kräfte. Die Winkel, welche ihre Resultante $R' = AD$ mit AB und AC bildet, bleiben dieselben, so lange das Verhältniss $\frac{Q}{P} = z$ dasselbe bleibt. Es ist also

$$\text{I} \qquad \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = tg\ x = \varphi(z).$$

Lassen wir nun in der Richtung von P die Kraft $-nQ$ und in der Richtung von Q die Kraft nP wirken, so wird ihre Resultante R'' mit Q den Winkel x bilden. Diese 4 Kräfte P, $-nQ$, Q und nP lassen sich nun auf zwei Weisen zusammensetzen, indem wir dieselben entweder in ihren ursprünglichen Richtungen AB und AC, oder indem wir ihre Resultanten R' und R'' zusammen-

1) Opuscules math. Paris 1773. Tome VI. p. 360.

fassen. Bildet nun ihre Gesammtresultante R mit R' den Winkel x', so haben wir im ersten Fall

$$tg\ (x + x') = \varphi\left(\frac{Q + nP}{P - nQ}\right) = \varphi\left(\frac{z + n}{1 - nz}\right).$$

Hieraus erhalten wir mit Hülfe von (I)

$$tg(x') = \frac{\varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right) - \varphi(z)}{1 + \varphi(z)\ .\ \varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)}. \qquad \text{II}$$

Im zweiten Fall erhalten wir

$$tg\ x' = \varphi\left(\frac{nR}{R}\right) = \varphi(n) \qquad \text{III}$$

Aus II und III ergiebt sich

$$\varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right) = \frac{\varphi(z) + \varphi(n)}{1 - \varphi(z)\ .\ \varphi(n)}.$$

Differentiiren wir noch z und n, und dividiren das erste Resultat durch das zweite, so erhalten wir

$$\frac{d\varphi z}{1+\overline{\varphi z}^2} \cdot \frac{1+z^2}{dz} = \frac{d\varphi n}{1+\overline{\varphi n}^2} \cdot \frac{1+n^2}{dn}.$$

Dieser Gleichung genügt die Annahme

IV $$\frac{d\varphi z}{1+\overline{\varphi z}^2} = \frac{a\,.\,dz}{1+z^2} \text{ und } \frac{d\varphi(n)}{1+\overline{\varphi n}^2} = \frac{a\,.\,dn}{1+n^2}, \text{ sodass}$$

V $$\text{arc } tg\ \varphi(z) = a\ .\ \text{arc } tg\ z.$$

Der specielle Werth $P = Q$ ergiebt $z = 1$ und $tg\ x = 1$; folglich $\varphi(z) = 1$ und aus V. folgt

$a = 1$ oder $a = 1 + 4\ m$ (unter m eine ganze Zahl verstanden). Der Verfasser zeigt, dass die letztere Annahme zu der Ungleichung

$tg\ x = \varphi(z) < 0$ führt. Daher ist $a = 1$

und $\varphi(z) = z$, also

$$tg\ x = \frac{Q}{P}.$$

Diese eben erwähnte Ableitung von $a = 1$ kann nicht als genügend angesehen werden.

Dagegen scheint der folgende auf die Grenzmethode gegründete Beweis vollkommen streng zu sein.

Beweis von Schlömilch [1]).

(I. II. IV. bis VII.)

Die Resultante R der beiden Kräfte P und Q (Fig. 12) habe gegen P die Neigung x. Da der Winkel x von dem Verhältniss zwischen P und Q abhängig ist, so gilt die Gleichung

$$x = \varphi\left(\frac{Q}{P}\right)$$ und für andre Kräfte P' und Q' in denselben Richtungen

$$x' = \varphi\left(\frac{Q'}{P'}\right)$$

Wählen wir die Kräfte P' und Q' so, dass

I $\qquad P'^2 + Q'^2 = P^2 + Q^2$, so hat die Resultante R' dieselbe Grösse, aber nicht dieselbe Richtung wie R.

Es sei Winkel $(R', P) = x'$. Ist nun die Resultante von R und R' gleich S, so ist

$$\angle\,(S, P) = \frac{1}{2}\,(x+x') = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{Q}{P}\right) + \varphi\left(\frac{Q'}{P'}\right)\right].$$

Denken wir uns aber alle 4 Kräfte in ihren ursprünglichen Richtungen und setzen sie zusammen, so entsteht

$\angle\,(S, P) = \varphi\left(\frac{P+P'}{Q+Q'}\right)$. Es ist daher

$$\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{Q}{P}\right) = \varphi\left(\frac{Q'}{P'}\right)\right] = \varphi\left(\frac{P+P'}{Q+Q'}\right) \ldots \text{Bed. (I.)}$$

Setzen wir $P' = P + \triangle P$ und $Q' = Q + \triangle Q$, so erhalten wir nach gehöriger Umformung

$$\varphi''(y) = -\frac{2y}{1+y^2} \cdot \varphi' y, \text{ worin } y = \frac{Q}{P} \text{ ist. Die Integration giebt}$$

---

1) Schlömilch's Zeitschr. für Math. u. Physik. 1857. Jahrgang II. St. 85.

$$\varphi(y) = a + b \,.\, \text{Arc } tg\ y;\ \text{d. h.}$$

$$x = a + b \,.\, \text{Arc } tg\ \frac{Q}{P}.$$

Setzen wir nach einander $Q = 0$ und $P = 0$, so erhalten wir $a = o$ und $b = 1$, sodass

$$x = \text{Arc tang } \frac{Q}{P} \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{P} = tg\ x \text{ ist.}$$

Beweis von Laplace[1]).

(I. II. IV. bis VII.)

Die Resultante R der beiden Kräfte P und Q bilde mit P den Winkel x. Lassen wir P um dP wachsen, während Q unverändert bleibt, so wird x um dx abnehmen. Das Increment dP lösen wir nach R und einer dazu senkrechten Richtung in dP' und dP'' auf. Dann macht die Resultante R' der beiden Kräfte $R + dP'$ und dP'' mit dP'' den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - dx\right)$. Es ist also

$$dP'' = R'\ \varphi\left(\frac{\pi}{2} - dx\right), \text{ wofür wir setzen dürfen}$$

$$dP'' = R\ (-k \,.\, dx).$$

Es ist aber auch $dP'' = dP \,.\, \varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{Q \,.\, dP}{R}$

Daraus folgt $dx = \frac{-Q \,.\, dP}{k \,.\, R \,.\, R'} = \frac{-Q \,.\, dP}{k \,.\, R^2}$, da R und R' unendlich wenig verschieden sind.

Lassen wir dagegen Q allein um dQ wachsen, so erhalten wir auf dieselbe Weise

$$dx = \frac{P \,.\, dQ}{k \,.\, R^2}\ .$$

---

1) Mécanique céleste. Paris An VII. (1799). Tome I, p. 4.

Nehmen aber P und Q zugleich um die angegebenen Grössen zu, so finden wir

$$k\,dx = \frac{P.dQ - Q\,d.P}{R^2} = \frac{PdQ - Q.dP}{P^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{P^2}}.$$

Die Integration liefert

$$\text{Arc } tg \frac{Q}{P} = kx + c; \text{ also } \frac{Q}{P} = tg\,(kx + c) \text{ und}$$

$$P = R \cos (kx + c)$$

Die Annahme $Q = 0$ giebt $c = 0$ und

$P = 0$ giebt $k = 2\,n + 1$ und

$$P = R \cos (2\,n + 1)\,x.$$

P wird aber nur gleich 0 bei $x = \frac{\pi}{2}$; folglich ist $n = 0$ und

$$P = R \cos x.$$

Beweis von Burg [1]).

(I. II. IV. bis VII.)

Dieser möge noch Aufnahme finden, weil er elementar gehalten ist; er ist indess nicht streng.

Die Resultante $R = A\,D$ (Fig. 13) bilde mit den Componenten $P = AB$ und $Q = AC$ die Winkel x und x'. Dann ist $P = R.\varphi(x)$ und $Q = R.\varphi(x')$. Zerlegen wir P und Q nach den beiden auf einander senkrechten Richtungen AG und EAF in p, q und p', q', so ist

$$p = P.\varphi(y'), \quad p' = P\varphi(y), \qquad \text{I.}$$
$$q = Q.\varphi(y), \quad q' = Q\varphi(y').$$

Es sei $p' > q'$. Dann ist

$$p + q = R\varphi(z) \text{ und } p' - q' = R.\,\varphi(x + y). \qquad \text{II.}$$

Setzen wir in II die Werthe aus I ein und bezeichnen allgemein $\varphi\,(qo - \omega)$ mit $\varphi'(\omega)$, so erhalten wir die Funktionalgleichungen

---

1) Compendium der Mechanik. Supplementband. Wien 1863. St. 1 und Jahrbücher d. K. K. polyt. Instit. Bd XIX.

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) - \varphi'(x) \cdot \varphi'(y) \text{ und}$$
$$\varphi'(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi'(y) + \varphi(x) \cdot \varphi'(y) . \qquad \text{III.}$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass für jeden reellen Werth von x, diesen Winkel in Bogenlänge ausgedrückt, die Relation besteht

$$R > \frac{Q}{x} > P.$$

Für $x = 0$ ergiebt sich $\frac{Q}{x} = \frac{0}{0} = R$ und da $Q = R\varphi'(x)$,

IV. $\frac{\varphi'(x_0)}{x_0} = 1$. Ebenso folgt aus den Gleichungen $P = R\varphi(x)$ und $Q = R \cdot \varphi'(x)$ für $x = 0$ $\varphi(x_0) = 1$ und $\varphi'(x_0) = 0$. Diese Werthe, verbunden mit IV. und den beiden Gleichungen III. ergeben (Burg's Lehrbuch d. höhern Math. I, 329)

$$\varphi x = \cos x \text{ und } \varphi' x = \sin x, \text{ sodass}$$
$$P = R \cos x .$$

Der letzte Schluss ist schwerlich zu rechtfertigen.

Beweis von Schlömilch[1]).

(I. II. IV. bis VII.)

Mit Berücksichtigung der Verhältnisse im letzten Beweise desselben Verfassers dürfen wir setzen

$$\frac{Q}{P} = \varphi(x) \text{ und } \frac{Q'}{P'} = \varphi(x').$$

Setzen wir die hieraus sich ergebenden Werthe für Q und Q' in die Gleichungen

$$\frac{Q+Q'}{P+P'} = \varphi\frac{x+x'}{2}; \; P^2 + Q^2 = P'^2 + Q'^2 \text{ ein und re-}$$

duciren beide auf $\frac{P}{P'}$, so erhalten wir die Funktionalgleichung

---

1) Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Physik II, 85.

$$\frac{\varphi x' - \varphi\frac{x+x'}{2}}{\varphi\frac{x+x'}{2} - \varphi x} = \sqrt{\frac{1+\varphi x'^2}{1+\varphi x^2}} \text{ und nehmen wir } x' = x + 2\delta,$$

$$\frac{\varphi(x+2\delta) - 2\varphi(x+\delta) + \varphi x}{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)} = \sqrt{\frac{1+\varphi(x+2\delta)^2}{1+\varphi x^2}} - 1 = \sqrt{V} - 1.$$

Da nun $\sqrt{V} - 1 = \frac{V-1}{\sqrt{V}+1}$, so liefert diese Gleichung

$$\frac{\frac{\varphi(x+2\delta) - 2\varphi(x+\delta) + \varphi x}{\delta^2}}{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi x}{\delta}} = \frac{2}{\sqrt{V}+1} \cdot \frac{\varphi(x+2\delta) + \varphi x}{1+\varphi x^2} \cdot \frac{\varphi(x+2\delta - \varphi x}{2\delta}$$

Für verschwindende δ wird $V = 1$, folglich

$$\frac{\varphi'' x}{\varphi' x} = \frac{2 \cdot \varphi x}{1+\varphi x^2}\, \varphi' x \,.$$ Die Substitution $\varphi x = u$ liefert

$$\frac{du}{dx} = a\,(1+u^2), \text{ woraus}$$

Arc $tg\ u = ax + \beta$ oder $u = tg\,(ax + \beta) = \varphi x$ folgt.

$Q = 0$ bringt $\beta = 0$ und $\varphi x = \frac{Q}{P} = tg\ ax.$

$ax = 45^0$ ergiebt $P = Q$. Das letztere erfordert aber $x = 45^0$; folglich ist $a = 1$ und

$$\frac{Q}{P} = tg\ x \,.$$

Der folgende Beweis zeichnet sich dadurch aus, dass die bei demselben eingeführte Hülfskraft mit den gegebenen Kräften nicht in derselben Ebene wirkt.

Beweis von Pontéculant [1]).

(I. II. IV. bis VII.)

Seien P und Q die beiden rechtwinklig zu einander auf einen Punkt wirkenden Kräfte, R ihre Resultante und $\angle\,(R, P) = x$.

1) Analytische Theorie des Weltsystems. Deutsch von Hartmann. Quedlinburg 1834. I. Bd.

Dann ist $P = R \,.\, \varphi(x)$. Um $\varphi(x)$ zu finden, nehmen wir eine Kraft Z zur Hülfe, welche senkrecht zur Ebene der P und Q an demselben Punkt angreift. Verbinden wir Z mit R, so sei die Resultante S und $\angle\ (S,R) = y$. Dann ist $R = S \,.\, \varphi(y)$. Verbinden wir aber erst Q und Z und fügen dann P hinzu, so muss dieselbe Resultante S entstehen. Wenn $\angle\ (S,P) = z$, so ist $P = S \,.\, \varphi(z)$. Diese Gleichung in Verbindung mit $P = R \,.\, \varphi x$ und $R = S \,.\, \varphi y$ geben die Funktionalgleichung

I. $$\varphi(z) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y).$$

II. $$\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}} = \frac{\varphi'(x) \,.\, \varphi(y)}{\varphi(x) \,.\, \varphi'(y)}.$$

Unter den Seiten x, y und z des zwischen den Richtungen P, R und S liegenden rechtwinkligen sphärischen Dreiecks findet folgendes Verhältniss Statt:

$$\cos z = \cos x \,.\, \cos y.$$

Die Differentiation nach x und y ergiebt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sin x \,.\, \cos y}{\sin z}\ ;\ \frac{dz}{dy} = \frac{\cos x \,.\, \sin y}{\sin z}.$$

Die Substitution dieser Werthe in II. ergiebt

$$\frac{\cos x \,.\, \varphi' x}{\sin x \,.\, \varphi x} = \frac{\cos y \,.\, \varphi' y}{\sin y \,.\, \varphi y}.$$

Da x und y unabhängig von einander sind, so folgt

$$\frac{\cos x \,.\, \varphi'(x)}{\sin x \,.\, \varphi(x)} = c = \text{const.}, \text{ also}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = c. \frac{\sin x}{\cos x} \,.\, dx \,.$$ Die Integration ergiebt

$$\log \varphi(x) = -\, c. \log \cos x + \log C.$$

$\varphi(x) = C\ (\cos x)^{-c}$. Da nun $X = R \,.\, \varphi(x)$, so folgt

$$X = R \,.\, C\ (\cos x)^{-c}.$$

Die Annahme $Y = 0$ ergiebt $C = 1$, sodass $X = R\ (\cos x)^{-c}$. Setzen wir $Y = X$, so ist

$R = X\sqrt{2}$ und $x = 45^0$, folglich

$X = X \sqrt{2}\,(\cos 45^0)^{-c}$. Dies ergiebt $-c = 1$. Es ist daher

$X = R \cdot \cos x$ und also hat die Resultante die Richtung der Diagonale.

Vierte Abtheilung.

Beweise, welche sich auf andere Sätze der Mechanik stützen.

Von den Versuchen, den Satz vom Parallelogramm aus anderen Sätzen der Mechanik abzuleiten, können nur diejenigen Wichtigkeit haben, welche selbst sich einfach entwickeln lassen und also nicht das zu Beweisende etwa schon voraussetzen. Ausser dem Princip des Hebels, welches am häufigsten zu diesem Zweck angewandt ist, hat man auch die Lehre von der lebendigen Kraft und einen Satz über den Schwerpunkt dazu benutzt.

Geht man, wie bei der ersten Art dieser Beweise gewöhnlich geschieht, vom Winkelhebel aus, so stützt man sich also auf folgenden Satz: Ein Winkelhebel ist im Gleichgewicht, wenn an den Armen desselben Kräfte wirken, deren Grösse in umgekehrtem Verhältniss mit den Perpendikeln stehen, welche vom Unterstützungspunkt auf die Richtungen der Kräfte gefällt werden.

Seien (Fig. 14) ACB der Hebel, P und Q die zusammen zu setzenden Kräfte und a, b die Längen der Perpendikel, so muss für den Fall des Gleichgewichtes $P.a = Qb$ sein. Verlegen wir nun P und Q nach dem mit dem Hebel in fester Verbindung stehenden Punkte D, in welchem sich ihre Richtungen schneiden, so erfordert das Gleichgewicht des Hebels, dass die Resultante durch C gehe. Ziehen wir CE und CF den Richtungen der Kräfte parallel, so ergiebt sich leicht das Verhältniss $P : Q = DE : DF$. Daraus folgt unmittelbar der gesuchte Satz: Die beiden durch DE und DF ihrer Grösse und Richtung nach dargestellten Kräfte haben eine Resultante, deren Richtung mit der Diagonale des durch sie bestimmten Parallelogramms zusammenfällt. Dass diese Resultante auch die Grösse der Diagonale hat, ergiebt sich, wenn wir eine der Resultante R gleiche aber entgegengesetzte

Kraft R_1 an D wirksam denken und eine der Componente Q entgegengesetzte Kraft Q_1 als Resultante von P und R_1 betrachten.

Diese Art des Beweises findet sich u. A. bei Kaestner (Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Göttingen 1780. St. 31).

Crelle [1]) geht vom einfachen Hebel aus. An den Enden A und B des einfachen Hebels ACB wirken die parallelen Kräfte P und Q. C sei der Unterstützungspunkt und AC habe die Länge a, BC die Länge b. Es werde angenommen, dass die beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Nach dem Satz vom Hebel ist dann

$$P \,.\, a = Q \,.\, b.$$

Die Längeneinheiten und Krafteinheiten mögen so gewählt sein, dass die Zahl $b = P$ und also auch $a = Q$ ist. Bringen wir nun, was unbeschadet des Gleichgewichts geschehen kann, in den Punkten A und B zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P in der Richtung des Hebels an, so werden diese sich mit den schon an A und B wirkenden P und Q zu den Resultanten R' und R'' vereinigen. An den Punkt D, in welchem die letzteren sich oberhalb des Hebels schneiden, versetzen wir nun die vier Kräfte von den Punkten A und B. Die beiden einander entgegengesetzten P heben sich auch hier auf, und die Kräfte P und Q haben eine ihnen parallele Resultante R, deren Richtung durch C gehen muss, da Gleichgewicht bestehen soll. Hierdurch und durch die bekannte Richtung von R' ist nun auch der Punkt D bestimmt, mithin auch, worauf es uns ankommt, die Richtung der Resultante R''. Die Construction ergiebt, dass das Dreieck ACD über AD gleichschenklig ist, sodass $CD = AC = a$. Die Resultante R'' der Kräfte P und Q hat also eine Richtung, welche mit der Diagonale des durch a und b, also auch des durch P und Q bestimmten Parallelogramms zusammenfällt. Es ergiebt sich nun sehr leicht, dass die Resultante weder kleiner noch grösser als die Diagonale sein kann, sodass sie mit derselben sowohl der Grösse als der Richtung nach übereinstimmt.

Die sich auf die Theorie des Hebels stützenden Beweise sind einfacher und augenscheinlicher als die meisten mathematischen,

---

1) Crelle's Journal 44. St. 220.

besonders die analytischen. Sie sind aber nicht so streng, da sie mehr Voraussetzungen machen als die besseren von diesen. Denn erstens lässt sich die Theorie des Hebels keineswegs ohne Anwendung von Hypothesen darthun; zweitens sind wir genöthigt, das Princip der Kräfteverlegung in Anwendung zu bringen, und endlich erhalten wir durch Benutzung dieser Theorie immer nur die Grösse und Richtung des mittleren Drucks, welchen die beiden Kräfte auf einen unbewegten Punkt ausüben. Es erfordert aber wieder eine Hypothese, wenn wir von diesem Druck auf die Grösse der Bewegung schliessen wollen, welche einem beweglichen Punkte durch die beiden Kräfte mitgetheilt wird. Dieser Umstand hat auch, wie Lagrange in seiner Mechanik erwähnt, die Mathematiker lange abgehalten, von der bekannten Theorie des Hebels bei der Zusammensetzung der Kräfte eine Anwendung zu machen.

Zerniköw [1]) legt seinem Beweise die Betrachtung der lebendigen Kraft zu Grunde. Die Kraftquantität, welche die Kraft g einem Körper von der Masse m in einer Sekunde mittheilt, ist gleich $\frac{mg^2}{2}$ Fusspfund, wie der Verfasser aus der Betrachtung des Falles der Körper ableitet. Ist der Körper aber gezwungen, sich in einer Richtung zu bewegen, welche mit der Richtung der Kraft den Winkel α einschliesst, so wird ein Theil der Kraft auf Bewegung, ein anderer Theil aber darauf verwandt, einen Druck gegen das Hinderniss auszuüben. Seien diese Theile g' und g'', so muss

$$\frac{mg^2}{2} = \frac{mg'^2}{2} + \frac{mg''^2}{2} \text{ sein.}$$

Da nun g' und g'' von g und α abhängig sind, so ist

$$g^2 = g^2\,[f(\alpha)]^2 + g^2\,[f(\frac{\pi}{2} - \alpha]^2 \text{ oder}$$

$$\text{I.} \qquad 1 = (f\alpha)^2 + (f\frac{\pi}{2} - \alpha)^2.$$

Weil $f(0) = 1$, so ist

$$f(\alpha) = \cos\alpha.$$

---

1) Grunert's Archiv Theil 25. St. 387.

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn $f(\alpha)$ mit Hülfe der Maclaurin'schen Reihe entwickelt wird.

Dieser Beweis ist schon deshalb ungenügend, weil Gleichung I unendlich viele Auflösungen zulässt [1]). Auch die Auflösung der Funktion in eine unendliche Reihe ist nicht zulässig, da die Möglichkeit einer solchen Entwickelung nicht a priori bekannt ist.

Es erübrigte nun noch, einen von Lambert in seinem mehrfach citirten Aufsatze gegebenen Beweis zu besprechen, der sich auf den Satz stützt, dass der Schwerpunkt eines um eine horizontale Achse drehbaren Massensystems die höchste oder tiefste Stelle einnimmt, wenn sich das System im Gleichgewicht befindet. Da der Beweis aber sehr umständlich und dabei keineswegs streng ist, er auch dem Verfasser selbst nicht genügte, so können wir von einem weitern Eingehen auf denselben abstehen.

Den Schluss möge ein interessanter Beweis machen, welchen Ritter [2]) aus dem Princip des kleinsten Zwanges abgeleitet hat.

Seien P' und P'' die Kräfte, welche auf den materiellen Punkt A von der Masse M zu gleicher Zeit nach den Richtungen AB und AC einwirken. Wäre nur die erste Kraft thätig, so würde der Punkt in der Zeit T den Weg $\frac{P'}{M} \cdot \frac{T^2}{2}$ zurücklegen. Offenbar wird ganz dasselbe geschehen, wenn der halben Masse die doppelte Bewegung mitgetheilt wird, wofern dieselbe nur mit der andern Hälfte fest verbunden ist. Wir können deshalb die Kraft P' durch die freie Bewegung

$2 \cdot \frac{P'}{M} \cdot \frac{T^2}{2} = b$ der einen halben und die Kraft P'' durch die freie Bewegung

$$2 \cdot \frac{P''}{M} \cdot \frac{T^2}{2} = c$$ der andern halben Masse ersetzen.

Die erstere geht in der Richtung AB, die letztere in der Richtung AC vor sich, und es findet die Bedingung Statt, dass

1) Siehe Schlömilch in seiner Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang II. St. 85.

2) A. Ritter, das Princip des kleinsten Zwanges. Dissertation. Göttingen 1853.

beide Theile untrennbar verbunden sind. Ohne diese Bedingung würden sich die Hälften in den Richtungen AB, AC um die Strecken b, c von der ursprünglichen Lage entfernen. Die wirkliche Lage der untrennbaren Masse ist also nach dem Princip des kleinsten Zwanges derjenige Punkt, für welchen die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Abstände von den Endpuncten der Strecken b und c ihren kleinsten Werth annimmt, oder da die beiden Massen einander gleich sind, für welchen die Summe der Quadrate dieser Abstände ein Minimum ist.

Wählen wir die anfängliche Lage des materiellen Punktes zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems, dessen Achsen mit den Richtungen AB und AC zusammenfallen, und bezeichnen die Endpunkte der Längen b und c durch die Coordinaten x_1 y_1; x_2 y_2, sowie denjenigen Punkt, in welchem sich die Masse M nach der Einwirkung der beiden Kräfte befindet, durch ξ, η, so muss

$$(\xi - x_1)^2 + (\xi - x_2)^2 = \text{min. und}$$
$$(\eta - y_1)^2 + (\eta - y_2)^2 = \text{min. sein.}$$

Es muss also

$$(\xi - x_1) + (\xi - x_2) = 0 \text{ und}$$
$$(\eta - y_1) + (\eta - y_2) = 0 \text{ sein. Daraus folgt}$$
$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ und } \eta = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Bei der oben bezeichneten Wahl des Coordinatensystems ist $x_2 = 0$ und $y_1 = 0$, sowie $x_1 = b$ und $y_2 = c$. Weil nun b und c doppelt so gross sind als die Strecken x und y, durch welche die ganze Masse vermöge der einzelnen Kräfte getrieben wäre, so ergiebt sich

$\xi = x$ und $\eta = y$, d. h. der Punkt befindet sich nach der Zeit T am Ende der Diagonale des aus x und y gebildeten Parallelogramms. Eine ganz ähnliche Betrachtung zeigt, dass er sich auch während der ganzen Zeit T auf derselben befunden haben muss.

Wenn auf den materiellen Punkt n Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, so ergeben sich die allgemeineren Formeln

$$\xi = \frac{\sum_1^n x_n}{n}; \quad \eta = \frac{\sum_1^n y_n}{n}; \quad \zeta = \frac{\sum_1^n z_n}{n}.$$

Fig. 1.

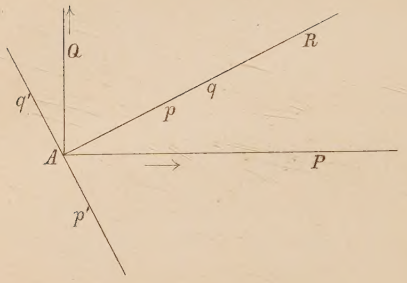


Fig. 4.

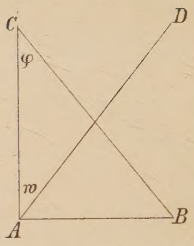


Fig. 3.

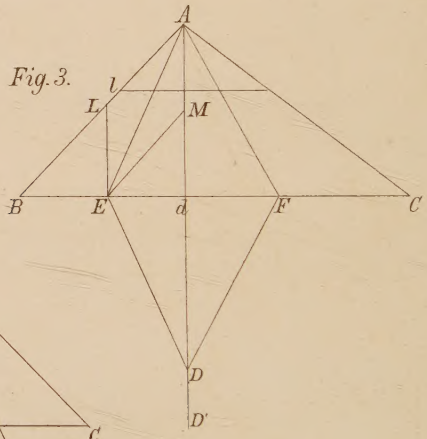


Fig. 2.

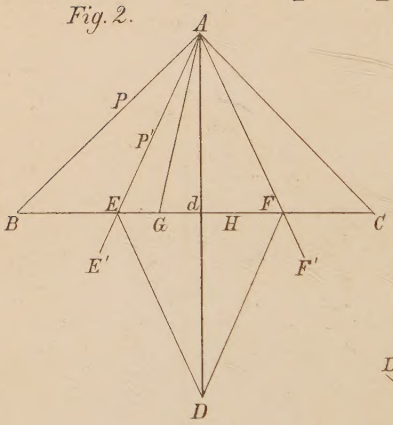


Fig. 6.

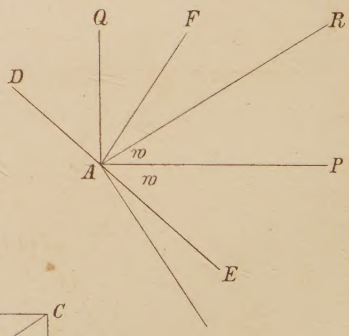
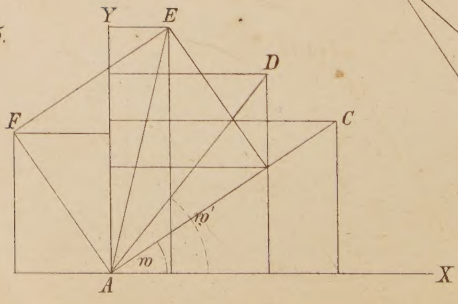


Fig. 5.



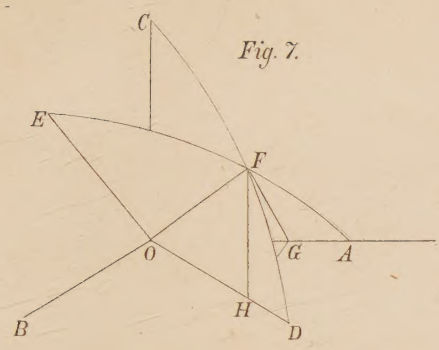


Fig. 7.

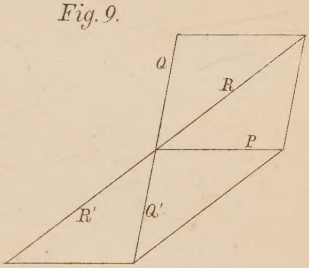


Fig. 9.

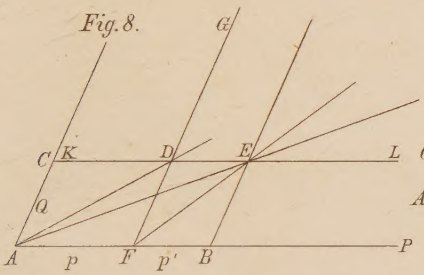


Fig. 8.

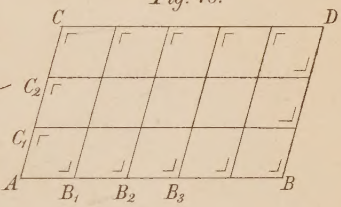


Fig. 10.

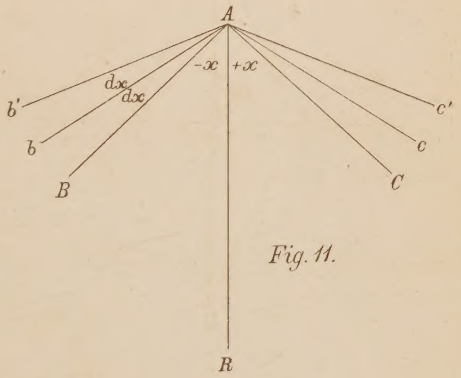


Fig. 11.

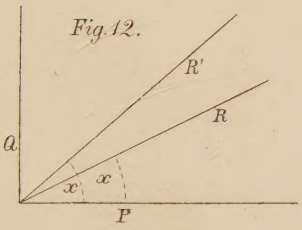


Fig. 12.

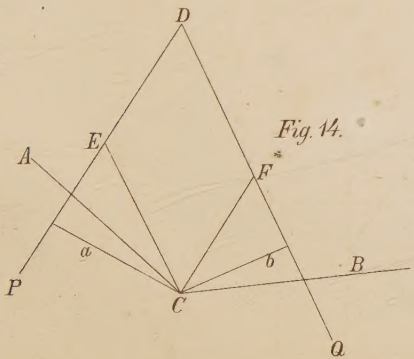


Fig. 14.

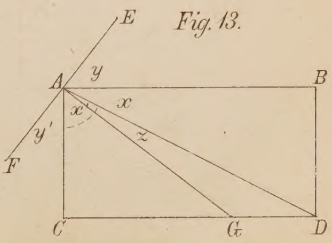


Fig. 13.